١/

مقرر التحليل العددي والبرمجة
السنة الثالثة ميزياد - الفصل الدراسي الثاني 2025

السؤال الأول (15 درجة)

- $f(x) = e^{-x} - x$
- $f'(x) = -e^{-x} - 1$
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ العلاقة التكرارية
- $\varepsilon_t = \left| \frac{\text{القيمة الحقيقية} - \text{القيمة التقريبية}}{\text{القيمة الحقيقية}} \right| \times 100$ الخطأ النسبي الحقيقي

القيمة الحقيقية للجذر المطلوب: $r = 0.567143290$

تنظم الخطوات في الجدول التالي ضمن الحل الآتية أي ($x_0 = 0$)

n	x_n	ε_t %
0	0	100
1	0.5	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.00000220

السؤال الرابع (15 درجة)

نقدم تبسيط بيه العلاقة التكرارية:

$$X^{n+1} = A \cdot X^{n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad X^{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{1} = A X^{0} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$X^{2} = A X^{1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/3 \\ 22/3 \end{pmatrix} = \frac{28}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 11/14 \end{pmatrix}$$

$$X^{3} = A X^{2} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139/14 \\ 111/14 \end{pmatrix} = \frac{139}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 111/159 \end{pmatrix}$$

$$X^{4} = A X^{3} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 111/159 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1389/139 \\ 1111/139 \end{pmatrix} = \frac{1389}{1111} \begin{pmatrix} 1 \\ 1111/1389 \end{pmatrix}$$

$$X^{5} = A X^{4} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1111/1389 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.99 \\ 7.99 \end{pmatrix}$$

$$X^{5} \simeq 9.99 \begin{pmatrix} 1 \\ 0.79 \end{pmatrix}$$

القيمة التقريبية لـ 9.99

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.79 \end{pmatrix}$: الشكل الخاص لمواقف

2/

(20 درجة)

الشرط القطري: $|a_{ij}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

$$\begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{pmatrix}$$

متحقق الشرط السابق محقق

2: نقوم باعادة كتابة جملة المعادلات السابقة بالشكل التالي:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

المعادلات المكررة (طريقة غاوس سيدل)

$$x_1^{n+1} = \frac{7.85 + 0.1x_2^{n} + 0.2x_3^{n}}{3}$$

$$x_3^{n+1} = \frac{71.4 - 0.3x_1^{n+1} + 0.2x_2^{n+1}}{10}$$

$$x_2^{n+1} = \frac{-19.3 - 0.1x_1^{n+1} + 0.3x_3^{n}}{7}$$

نظم الحلول في الجدول لعدة خطوات من أجل الابتدائي $(0,0,0)$

n	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	0	0	0
1	2.616667	-2.794524	7.005610
2	2.990557	-2.499625	7.000291

3/

الثالث (20 درجة)

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$: نستخدم الصيغة التالية

بما أنه لدينا 4 نقاط: بالتالي نستخدم صيغة لاغرانج من الدرجة الثالثة:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) L_i(x) \quad (1)$$

$x_0 = 0$ $\quad f(x_0) = 15$

$x_1 = 5$ $\quad f(x_1) = -5$

$x_2 = 10$ $\quad f(x_2) = 30$

$x_3 = 15$ $\quad f(x_3) = 5$

$$L_0(x) = \frac{(x-5)(x-10)(x-15)}{(0-5)(0-10)(0-15)} = -\frac{x^3}{750} + \frac{x^2}{25} - \frac{11x}{30} + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-10)(x-15)}{(5-0)(5-10)(5-15)} = \frac{x^3}{250} - \frac{x^2}{10} + \frac{3x}{5}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-5)(x-15)}{(10-0)(10-5)(10-15)} = -\frac{3x^3}{250} + \frac{2x^2}{25} - \frac{3x}{10}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-5)(x-10)}{(15-0)(15-5)(15-10)} = \frac{x^3}{750} - \frac{x^2}{50} + \frac{x}{15}$$

أخيراً نعوض كثير الحدود الناتج بالعلاقة (1) لنحصل على كثير الحدود المطلوب:

$$P_3(x) = -\frac{23}{150}x^3 + \frac{17}{5}x^2 - \frac{103}{6}x + 15$$

$$f(7) \approx P_3(7) = \frac{221}{25}$$