2025

سلم تصحيح الفيزياء الإحصائية - س 3 - فيزياء - دورة ف 2 - [redacted]

- هاملتوني غاز ذري فائق البرودة في مصيدة توافقية مع وبدون تأثيرات التماس بين الذرات وطاقته

$$H(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\vec{P}_i^{\,2}}{2.m} + \frac{1}{2}.m.W^2.x_i^2 \right] + \sum_{i>j} g.\delta(x_i - x_j)$$

$$H(x_1, x_2) = \frac{\vec{P}_1^{\,2}}{2.m} + \frac{\vec{P}_2^{\,2}}{2.m} + \frac{1}{2}.m.W^2.x_1^2 + \frac{1}{2}.m.W^2.x_2^2 + g.\delta(x_1 - x_2)$$

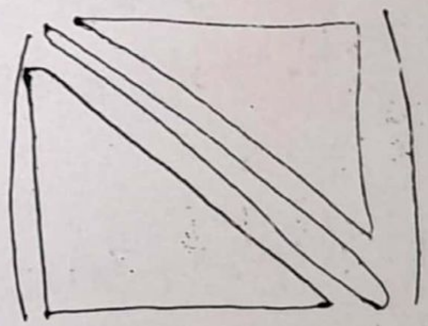
$$H(x_1, x_2) = \frac{\vec{P}_1^{\,2}}{2.m} + \frac{\vec{P}_2^{\,2}}{2.m} + \frac{1}{2}.m.W^2.x_1^2 + \frac{1}{2}.m.W^2.x_2^2$$

$$E(\vec{n}) = \hbar.w.(n_1 + \tfrac{1}{2}) + \hbar.w.(n_2 + \tfrac{1}{2}) \quad ; \vec{n} = (n_1, n_2)$$

$$E(\vec{n}) = \hbar.w.(n_1 + n_2 + 1) \quad ; \vec{n} = (n_1, n_2)$$

$$\mu s \equiv r = (n_1, n_2)$$

$$(n) = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & \cdots & n_{1\infty} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & \cdots & n_{2\infty} \\ \vdots & & & & \\ n_{\infty 1} & n_{\infty 2} & n_{\infty 3} & \cdots & n_{\infty\infty} \end{vmatrix} =$$



$$n_{11} = (n_1, n_1) \; ; \; n_{12} = (n_1, n_2), \dots$$

$$n_1 = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$n_2 = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

II- الغاز الذري مكون من ذرتي $^{4}_{2}He$: جملة بوزونية.

6- ذرة الهليوم $^{4}_{2}He$ هي بوزون. من أجل البوزونات يمكن أن يكون $n_1 = n_2$ أي أن العناصر القطرية مقبولة فيزيائيا.
من جهة أخرى، بما أن البوزونات غير قابلة للتمايز، فإن الحالة الميكروية $n_{ij} = (n_i, n_j)$ مطابقة فيزيائيا للحالة الميكروية $n_{ji} = (n_j, n_i)$، وهذا يعني أن الحالات الموجودة (الممثلة) بالمثلث تحت القطر مطابقة للحالات الميكروية الموجودة فوق قطر المصفوفة (n). ويكفي إذن أخذ أحد القسمين. إذن من أجل جملة مكونة من بوزونين:

$$\Gamma = MS = \{(n_1, n_2),\ n_1 \geq n_2\}$$

$$(n_B) = \begin{pmatrix} n_{11} & & \text{غير مقبولة فيزيائيا} & \\ n_{21} & n_{22} & & \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \\ n_{\infty 1} & n_{\infty 2} & n_{\infty 3} \cdots & n_{\infty\infty} \end{pmatrix}$$

-7
$$Q_B(\beta, \omega) = \sum_{n_1 \leq n_2} e^{-\beta . E(\vec{n})} = \sum_{n_1 \leq n_2} e^{-\beta . \hbar . \omega . (n_1 + n_2 + 1)}$$

هنا أخذنا $n_1 \leq n_2$ وهذا مكافئ تماما للحالة $n_1 \geq n_2$.

$$Q_B = \sum_{n = n_1 = n_2} e^{-\beta . \hbar . \omega . (n + n + 1)} + \sum_{n_1 < n_2} e^{-\beta . \hbar . \omega . (n_1 + n_2 + 1)}$$

$$Q_B = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta . \hbar . \omega . (2 . n + 1)} + \sum_{n_1 < n_2} e^{-\beta . \hbar . \omega . (n_1 + n_2 + 1)}$$

نخرج من المجموع الكميات المستقلة عن دليل الجمع:

$$Q_B = e^{-\beta . \hbar . \omega} . \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta . \hbar . \omega . (2 . n)} + e^{-\beta . \hbar . \omega} . \sum_{n_1 < n_2} e^{-\beta . \hbar . \omega . (n_1 + n_2)}$$

نفرض أن:

$$x = \exp(-\beta.\hbar.\omega) \; ; \; x^2 = \exp(-2.\beta.\hbar.\omega)$$

$$Q_B = x.\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n + x.\sum_{n_1<n_2} e^{-\beta.\hbar.\omega.n_1}.e^{-\beta.\hbar.\omega.n_2}$$

$$Q_B = x.\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n + x.\sum_{n_1=0}^{\infty}(x)^{n_1}.\sum_{n_2=n_1+1}^{\infty}(x)^{n_2}$$

نجري تغيير متحول :

$$k = n_2 - n_1 - 1 \Rightarrow n_2 = k + n_1 + 1$$

$$\text{if } n_2 = n_1 + 1 \Rightarrow k = n_1 + 1 - n_1 - 1 = 0$$

$$Q_B = x.\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n + x.\sum_{n_1=0}^{\infty}(x)^{n_1}.\sum_{k=0}^{\infty}(x)^{k+n_1+1}$$

$$Q_B = x.\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n + x^2.\sum_{n_1=0}^{\infty}(x)^{2.n_1}.\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

$$(x)^{2.n_1} = (x^2)^{n_1} \; ; \; k \longleftrightarrow n \; ; \; n_1 \longleftrightarrow n$$

$$Q_B = x.\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n + x^2.\sum_{n_1=0}^{\infty}(x^2)^{n_1}.\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$Q_B = x.\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n + x^2.\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n.\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$Q_B = x.\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n.\left\{1 + x.\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x} \; ; \; \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$$

$$Q_B = \frac{x}{1-x^2}.\left\{1 + \frac{x}{1-x}\right\} = \frac{x}{1-x^2}.\frac{1}{1-x}.$$

إذن :

$$1 - x^2 = (1-x).(1+x)$$

$$\varphi_B = \frac{x}{(1+x).(1-x)^2} \quad ; \; x = x(\beta) = \exp(-\hbar.w.\beta)$$

$$F_B(\beta, w) = -k.T.\ln(\varphi_B) = -\beta^{-1}.\ln(\varphi_B)$$

$$F_B(\beta, w) = -\beta^{-1}.\ln\left[\frac{x}{(1+x).(1-x)^2}\right]$$

-9

$$U_B(\beta, w) = -\left[\frac{\partial}{\partial \beta}\ln(\varphi_B)\right]_{N,V}$$

نستخدم العلاقة العامة :

$$\left[\ln u(x)\right]' = \frac{u'}{u}$$

$$U_B = -\frac{(1+x).(1-x)^2}{x}.\underbrace{\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{x}{(1+x).(1-x)^2}\right]}_{T}$$

$$T = \frac{x'.(1+x).(1-x)^2 - x.\left[(1+x).(1-x)^2\right]'}{(1+x)^2.(1-x)^4}$$

$$T = \frac{x'.(1+x).(1-x)^2 - x.\left[x'.(1-x)^2 + 2.(1+x).(-x').(1-x)\right]}{(1+x)^2.(1-x)^4}$$

$$T = x'.\frac{(1+x).(1-x)^2 - x.(1-x)^2 + 2.x.(1+x).(1-x)}{(1+x)^2.(1-x)^4}$$

$$T = x'.\frac{(1+x).(1-x) - x.(1-x) + 2.x.(1+x)}{(1+x)^2.(1-x)^3}$$

$$U_B = -\frac{(1+x).(1-x)^2}{x}.x'.\frac{(1+x).(1-x) - x + x^2 + 2.x + 2.x^2}{(1+x)^2.(1-x)^3}$$

$$U_B = -\frac{x'}{x}.\frac{1 - x + x - x^2 + x + 3.x^2}{(1+x).(1-x)}$$

$$U_B = -\frac{x'}{x} \cdot \frac{2 \cdot x^2 + x + 1}{(1+x) \cdot (1-x)}$$

$$x' = \frac{\partial}{\partial \beta} x = \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\hbar \cdot w \cdot \beta} = -\hbar \cdot w \cdot e^{-\hbar \cdot w \cdot \beta} = -\hbar \cdot w \cdot x$$

$$x' = -\hbar \cdot w \cdot x \Rightarrow \frac{x'}{x} = -\hbar \cdot w \Rightarrow$$

$$U_B(\beta, w) = +\hbar \cdot w \cdot \frac{2 \cdot x^2 + x + 1}{(1+x) \cdot (1-x)}$$

10-

$$S_B(\beta, w) = k \cdot \beta \cdot U_B + k \cdot \ln(Q_B)$$

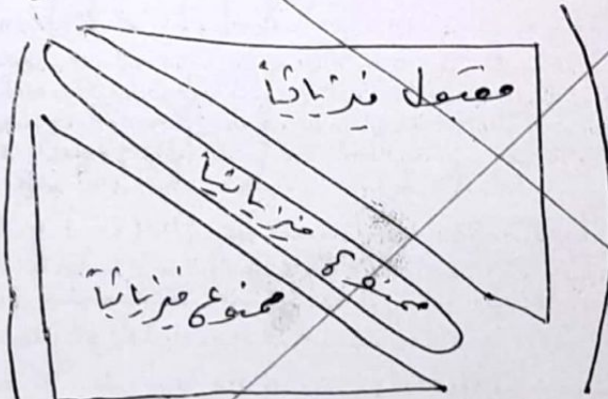
$$S_B(\beta, w) = k \cdot \hbar \cdot w \cdot \beta \cdot \frac{2 \cdot x^2 + x + 1}{(1+x) \cdot (1-x)} + k \cdot \ln\left[\frac{x}{(1+x) \cdot (1-x)^2}\right]$$

III - الغاز الذري مكون من ذرتي $^{3}_{2}He$: جملة فرميونين

11- من أجل فرميونين تكون الحالة $n_1 = n_2$ ممنوعة فيزيائيا. إذن قطر المصفوفة (n_F) ممنوع فيزيائيا. وبما أن الجسيمات غير قابلة للتمايز فإن $(n_1, n_2) = (n_2, n_1)$ ومنه نأخذ فقط الحالات (n_1, n_2) بحيث يكون $n_1 < n_2$ أو $n_2 < n_1$.

$$r = MS = \{(n_1, n_2),\ n_1 < n_2\}$$

$(n_F) =$



12-

$$Q_F(\beta, w) = \sum_{n_1 < n_2} e^{-\beta \cdot E(\vec{n})} = \sum_{n_1 < n_2} e^{-\beta \cdot \hbar \cdot w \cdot (n_1 + n_2 + 1)}$$

$n_1 \neq n_2$ and $n_1 < n_2$ for fermions.

$$Q_F = x \cdot \sum_{n_1 < n_2} e^{-\beta \cdot \hbar \cdot w \cdot (n_1 + n_2)} = x \cdot \sum_{n_1 < n_2} e^{-\beta \cdot \hbar \cdot w \cdot n_1} \cdot e^{-\beta \cdot \hbar \cdot w \cdot n_2}$$

Scanned with CamScanner

10-1-2025 عدد النيوترينوات :

$$f(\epsilon) = \frac{1}{1+e^{\beta\cdot\epsilon}}$$

$$D(p)\cdot dp = \frac{V}{h^3}\cdot 4\cdot\pi\cdot p^2\cdot dp \quad , \quad \varepsilon = c\cdot p$$

$$D(\varepsilon)\cdot d\varepsilon = \frac{V}{h^3\cdot c^3}\cdot 4\cdot\pi^2\cdot\varepsilon^2\cdot d\varepsilon$$

$$\langle N\rangle = \int_0^\infty d\varepsilon\cdot f(\varepsilon)\cdot D(\varepsilon) = \frac{4\cdot\pi\cdot V}{h^3\cdot c^3}\int_0^\infty d\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon^2}{1+e^{\beta\cdot\varepsilon}}$$

$$\langle N\rangle = \frac{4\cdot\pi\cdot V}{h^3\cdot c^3}\cdot(k\cdot T)^3\cdot\int_0^\infty\frac{x^2\cdot dx}{1+e^x}$$

$$\frac{\langle N\rangle}{V} = \frac{4\cdot\pi}{h^3\cdot c^3}\cdot(k\cdot T)^3\cdot\int_0^\infty\frac{x^2\cdot dx}{1+e^x}$$

$$T = 2,7\ K \longrightarrow \frac{\langle N\rangle}{V} = 7,6\cdot 10^6\cdot T^3\cdot m^{-3} \simeq 150\cdot 10^6\, m^{-3}$$

- متوسط الطاقة :

$$\langle H\rangle = \int_0^\infty d\varepsilon\cdot f(\varepsilon)\cdot\varepsilon\cdot D(\varepsilon)$$

$$\langle H\rangle = \frac{4\cdot\pi\cdot V}{h^3\cdot c^3}\cdot\int_0^\infty d\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon^3}{1+e^{\beta\cdot\varepsilon}} = \frac{4\cdot\pi\cdot V}{h^3\cdot c^3}\cdot(k\cdot T)^4\cdot\int_0^\infty\frac{x^4\cdot dx}{1+e^x}$$

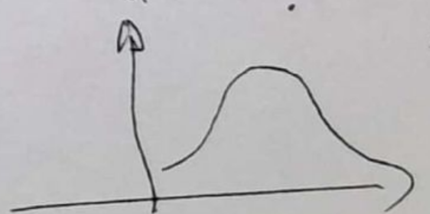
$$\langle H\rangle = \frac{V}{h^3\cdot c^3}\cdot(k\cdot T)^4\cdot\frac{7\cdot\pi^5}{30}$$

$$\frac{\langle H\rangle}{V} = 3,3\cdot 10^{-10}\cdot T^4\cdot J\cdot m^{-3} = 1,8\cdot 10^{-14}\ J\cdot m^{-3}$$

2- طيف الطاقة

$$\frac{1}{V}\cdot\varepsilon\cdot f(\varepsilon)\cdot D(\varepsilon) \Rightarrow \quad u(\varepsilon)$$

$$u(\varepsilon) = \frac{1}{V}$$



$$u(\varepsilon) = \frac{4\cdot\pi}{h^3\cdot c^3}\cdot\frac{\varepsilon^3}{1+e^{\beta\cdot\varepsilon}}$$

جمع الميكروقانوني. (45 درجة) $\boxed{7}$

جسيم في حقل $\vec{B}$:

$$\hat{h} = -\vec{B}\cdot\vec{M}_s = -\vec{B}\cdot\left(g_s\cdot\frac{q}{2.m}\right)\cdot\vec{S}$$

جملة N جسيم في حقل $\vec{B}$:

$$\vec{M}_s = \sum_{i=1}^{N} g_s\cdot\frac{q}{2.m}\cdot\vec{S}_i = g_s\cdot\frac{q}{2.m}\cdot\sum_{i=1}^{N}\vec{S}_i$$

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{N}\vec{S}_i \quad ; \quad \vec{M}_s = g_s\cdot\frac{q}{2.m}\cdot\vec{S}$$

$$\hat{H} = -\vec{B}\cdot\vec{M}_s = -(B\cdot\vec{u}_3)\cdot\vec{M}_s = -B\cdot M_{s,3}$$

$$\hat{H} = -B\cdot g_s\cdot\frac{q}{2.m}\cdot\hat{S}_3$$

معادلة القيم والأشعة الذاتية لأحد الجسيمات:

$$e_i = \pm\frac{\hbar}{2} \equiv \sigma_i\cdot\frac{\hbar}{2}$$

$$\hat{S}_{3i}\,|s_i, m_i\rangle = e_i\,|s_i, m_i\rangle$$

$$\hat{S}_{3i}\,|s_i, m_i\rangle = \sigma_i\cdot\frac{\hbar}{2}\cdot|s_i, m_i\rangle$$

نضرب طرفي العلاقة من اليمين بالكمية

$$\prod_{j\neq i}|s_j, m_j\rangle$$

$$\hat{S}_{3i}\,|s_i, m_i\rangle\cdot\prod_{j\neq i}^{N}|s_j, m_j\rangle = \sigma_i\cdot\frac{\hbar}{2}\cdot|s_i, m_i\rangle\cdot\prod_{j\neq i}^{N}|s_j, m_j\rangle$$

$$\hat{S}_{3i}\cdot\prod_{i=1}^{N}|\hat{s}_i, m_i\rangle = \sigma_i\cdot\frac{\hbar}{2}\cdot\prod_{i=1}^{N}|s_i, m_i\rangle$$

$$|\Psi_s\rangle = \prod_{i=1}^{N}|s_i, m_i\rangle \equiv |S, M_s\rangle$$

$$\hat{S}_{3i}\,|\Psi_s\rangle = \sigma_i\cdot\frac{\hbar}{2}\cdot|\Psi_s\rangle$$

يوجد N معادلة من هذا الشكل. نقوم بجمع هذه المعادلات:

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{S}_{3i}\right)}_{\hat{S}_3}\cdot|\Psi_s\rangle = \left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)\cdot\frac{\hbar}{2}\cdot|\Psi_s\rangle$$

نضرب على اليسار بالكمية $-B\cdot g_s\cdot\frac{q}{2.m}$.

$$-B\cdot g_s\cdot\frac{1}{2\cdot m}\cdot S_3\,|\Psi_s\rangle=-B\cdot g_s\cdot\frac{1}{2\cdot m}\cdot\sum_{i=1}\sigma_i\cdot\frac{\hbar}{2}\cdot|\Psi_s\rangle$$

$$\hat{H}|\Psi_s\rangle=-B\cdot\underbrace{g_s\cdot\frac{q\cdot\hbar}{4\cdot m}}_{\varepsilon}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)\cdot|\Psi_s\rangle$$

$$\boxed{\begin{cases}\hat{H}|\Psi_s\rangle=E_s\cdot|\Psi_s\rangle\\ E_s=-B\cdot\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\ ;\ \varepsilon=g_s\cdot\frac{q\cdot\hbar}{4\cdot m}\end{cases}}$$

$$\boxed{\sigma_i=\pm1\ \forall i\in[1,N]}$$

2- كبار الإحتمال :

3-

$$P_+=\frac{e^{-\beta\cdot E_+}}{Z}\ ;\ Z=e^{-\beta\cdot E_+}+e^{-\beta\cdot E_-}$$

$$E_s=-B\cdot\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=-B\cdot\varepsilon\cdot[N_+\cdot(+1)]-B\cdot\varepsilon\cdot[N_-\cdot(-1)]$$

$$E_s=-B\cdot\varepsilon\cdot N_++B\cdot\varepsilon\cdot N_-$$

$$\boxed{\begin{array}{l}E_s=E_++E_-\\ E_+=-B\cdot\varepsilon\cdot N_+\ ;\ E_-=+B\cdot\varepsilon\cdot N_-\end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l}E_s=-B\cdot\varepsilon\cdot(N_+-N_-)\\ N=N_++N_-\end{array}\right\}\Rightarrow E_s=-B\cdot\varepsilon\cdot(N_+-N+N_+)\Rightarrow$$

$$E_s=-B\cdot\varepsilon\cdot(2\cdot N_+-N)$$

$$\boxed{N_\mp=\frac{1}{2}\cdot\left(N\pm\frac{E_s}{B\cdot\varepsilon}\right)}$$

-4

$$S(N,V,E)=k\cdot\ln\Omega_s(N,V,E)$$

$$S=k\cdot\ln(N!)-k\cdot\ln(N_+!)-k\cdot\ln(N_-!)$$

نطبق تقريب stirling

$$\ln(N!)=N\cdot\ln(N)-N$$

Scanned with CamScanner

$$S = k.N.\ln(N) - k.N - k.N_+ .\ln(N_+) + k.N_+$$
$$- k.N_- .\ln(N_-) + k.N_-$$
$$S = k.N.\ln(N) + k.N - k.N_+ .\ln(N_+) - k.N_- .\ln(N_-)$$
$$S = k.N.\left[1 + \ln(N)\right] - k.N_+ .\ln(N_+) - k.N_- .\ln(N_-)$$
$$\boxed{S = k.N.\ln(e.N) - k.N_+ .\ln(N_+) - k.N_- .\ln(N_-)}$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E_s}\right)_{N,B} = -k.\left\{\left(\frac{dN_+}{dE_s}\right).\ln(N_+) + N_+ .\frac{d\ln(N_+)}{dE_s} + \left(\frac{dN_-}{dE_s}\right).\ln(N_-) + N_- .\frac{d\ln(N_-)}{dE_s}\right\}$$

$$\left(\frac{dN_+}{dE_s}\right) = \frac{d}{dE_s}\frac{1}{2}.\left(N - \frac{E_s}{B.\varepsilon}\right) = -\frac{1}{2.B.\varepsilon}.\frac{dE_s}{dE_s} = -\frac{1}{2.B.\varepsilon}$$

$$\frac{d\ln(N_+)}{dE_s} = \frac{1}{N_+}.\frac{dN_+}{dE_s} = \frac{1}{\frac{1}{2}.\left(N - \frac{E_s}{B.\varepsilon}\right)}.\frac{-1}{2.B.\varepsilon}$$

$$\frac{d\ln(N_+)}{dE_s} = -\frac{1}{B.\varepsilon.N - E_s}$$

$$\frac{dN_-}{dE_s} = \frac{d}{dE_s}\frac{1}{2}.\left(N + \frac{E_s}{B.\varepsilon}\right) = +\frac{1}{2.B.\varepsilon}$$

$$\frac{d\ln(N_-)}{dE_s} = \frac{1}{\frac{1}{2}.\left(N + \frac{E_s}{B.\varepsilon}\right)}.\frac{+1}{2.B.\varepsilon} \Rightarrow \frac{d\ln(N_-)}{dE_s} = \frac{1}{B.\varepsilon.N + E_s}$$

$$\frac{1}{T} = -k.\left\{\left(-\frac{1}{2.B.\varepsilon}\right).\ln\frac{1}{2}.\left(N - \frac{E_s}{B.\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}.\left(N - \frac{E_s}{B.\varepsilon}\right).\frac{-1}{B.\varepsilon.N - E_s} + \left(\frac{1}{2.B.\varepsilon}\right).\ln\frac{1}{2}.\left(N + \frac{E_s}{B.\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}.\left(N + \frac{E_s}{B.\varepsilon}\right).\left(\frac{1}{B.\varepsilon.N + E_s}\right)\right\}$$

بعد الإختصار

$$E_s = B.N.\varepsilon.\frac{1 - e^{2.\beta.B.\varepsilon}}{1 + e^{2.\beta.B.\varepsilon}} \qquad \tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$E_s = -N.B.\varepsilon.\tanh\left(\frac{B\varepsilon}{kT}\right)$$

$$E = \sum_i N_i \cdot E_i = cst$$

$$\mathbb{L} = S + \lambda \cdot \left[E - \sum_i N_i \cdot E_i \right]$$

$$d\mathbb{L} = dS - \sum_i dN_i \cdot \lambda \cdot E_i$$

-2

$$\left.\begin{array}{l} N_i >> 1 \\ g_i >> 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g_i + N_i - 1 \simeq g_i + N_i \\ g_i - 1 \simeq g_i \end{array}\right\} \Rightarrow \Omega_{BE} \simeq \prod_i \frac{(g_i + N_i)!}{g_i! \cdot N_i!}$$

$$S = k_B \cdot Ln\, \Omega_{BE} \simeq k_B \cdot Ln \prod_i \frac{(g_i + N_i)!}{g_i! \cdot N_i!}$$

$$S = k_B \cdot \sum_i \left\{ Ln(g_i + N_i)! - Ln(g_i)! - Ln(N_i!) \right\}$$

نطبق تقريب stirling على كل الحدود :

$$Ln(N!) \simeq N \cdot Ln(N) - N$$

$$S = k_B \cdot \sum_i \left\{ (g_i + N_i) \cdot Ln(g_i + N_i) - (g_i + N_i) - g_i \cdot Ln(g_i) + g_i - N_i \cdot Ln(N_i) + N_i \right\}$$

$$S = k_B \cdot \sum_i \left\{ (g_i + N_i) \cdot Ln(g_i + N_i) - N_i \cdot Ln(N_i) - g_i \cdot Ln(g_i) \right\}$$

نفاضل الطرفين علما بأن $g_i = cst$:

$$dS = k_B \cdot \sum_i \left\{ dN_i \cdot Ln(g_i + N_i) + (g_i + N_i) \cdot \frac{1}{(g_i + N_i)} \cdot dN_i - dN_i \cdot Ln(N_i) - N_i \cdot \frac{1}{N_i} \cdot dN_i \right\}$$

$$dS = k_B \cdot \sum_i dN_i \cdot \left\{ Ln(g_i + N_i) + 1 - 1 - Ln(N_i) \right\}$$

$$dS = k_B \cdot \sum_i dN_i \cdot Ln\left(\frac{g_i + N_i}{N_i} \right)$$

3- نعوض عبارة dS في $d\mathbb{L}$:

$$d\mathbb{L} = k_B \cdot \sum_i dN_i \cdot Ln\left(\frac{g_i + N_i}{N_i} \right) - \sum_i dN_i \cdot \lambda \cdot E_i$$

$$d\mathbb{L} = \sum_i dN_i \cdot \left\{ k_B \cdot \ln\left(\frac{g_i + N_i}{N_i} \right) - \lambda \cdot E_i \right\}$$

حسب مبدأ الاحتمال الترموديناميكي الأعظمي أو الأنتروبية العظمى:

$$d\mathbb{L} = 0 \;\; \forall \{dN_i\} \Rightarrow k_B \cdot \ln\left(\frac{g_i + N_i}{N_i} \right) - \lambda \cdot E_i = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{g_i + N_i^0}{N_i^0} = \exp\left(\frac{\lambda}{k_B} \cdot E_i \right) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i^0} = -1 + \exp\left(\frac{\lambda \cdot E_i}{k_B} \right) \Rightarrow$$

$$N_i^0 = \frac{g_i}{-1 + \exp\left(\frac{\lambda}{k_B} \cdot E_i \right)}$$

4- عبارة $dg(P)$:

$$dg(P) = g(S) \cdot \frac{V}{h^3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot P^2 \cdot dP$$

$$\left. \begin{array}{l} E^2 = P^2 \cdot C^2 + m^2 \cdot C^4 \\ m = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E^2 = P^2 \cdot C^2 \Rightarrow E = P \cdot C \; ; \; P = \frac{E}{C}$$

$$E = \hbar \cdot \omega \Rightarrow P = \left(\frac{\hbar}{c} \right) \cdot \omega$$

$$P^2 = \left(\frac{\hbar}{c} \right)^2 \cdot \omega^2 \; ; \; dP = \left(\frac{\hbar}{c} \right) \cdot d\omega$$

$$dg(\omega) = g(S) \cdot \frac{V}{h^3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\hbar}{c} \right)^2 \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{c} \right) \cdot d\omega \; ; \; \hbar = \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

$$dg(\omega) = g(S) \cdot \frac{V}{2 \cdot \pi^2 \cdot C^3} \cdot \omega^2 \cdot d\omega$$

5- تقريب النهاية الكلاسيكية:

$$N_i^0 \longrightarrow dN(E) = \frac{dg(E)}{-1 + \exp(\beta \cdot E)}$$

نقوم بإجراء تغيير متحول يؤدي لتغيير تابع:

$$dN(E) \xrightarrow{E = \hbar \cdot \omega} dN(\omega) \; ; \; dg(E) \xrightarrow{E = \hbar \cdot \omega} dg(\omega)$$

$$dN(\omega) = \frac{dg(\omega)}{-1 + \exp(\beta \cdot \hbar \cdot \omega)}$$

$$g(S) = 2 \Rightarrow dN(\omega) = \frac{V}{\pi^2 \cdot C^3} \cdot \frac{\omega^2 \cdot d\omega}{-1 + \exp(\beta \cdot \hbar \cdot \omega)}$$

تعطى الطاقة الداخلية للفوتونات التي يقع نبضها في المجال $[\omega, \omega + d\omega]$ بالعلاقة:

$$dU(\omega) = dN(\omega)\cdot(\hbar\cdot\omega) \Rightarrow$$

$$dU(\omega, T) = \frac{\hbar \cdot V}{\pi^2 \cdot c^3} \cdot \frac{\omega^3 \cdot d\omega}{-1 + \exp(\beta\cdot\hbar\cdot\omega)} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{k_B \cdot T}$$

$$U = \int_0^\infty dU(\omega, T) = \frac{\hbar\cdot V}{\pi^2 \cdot c^3} \cdot \int_0^\infty \frac{\omega^3 \cdot d\omega}{-1 + \exp(\beta\cdot\hbar\cdot\omega)}$$

$$x = \beta\cdot\hbar\cdot\omega \Rightarrow \omega = \frac{x}{\beta\cdot\hbar} \Rightarrow d\omega = \frac{dx}{\beta\cdot\hbar}$$

$$U = \frac{\hbar\cdot V}{\pi^2 \cdot c^3} \cdot \left(\frac{1}{\beta\cdot\hbar}\right)^4 \cdot \int_0^\infty \frac{x^3 \cdot dx}{-1 + \exp(x)} \quad ; \quad \int_0^\infty \frac{x^3 \cdot dx}{-1 + \exp(x)} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$U = \frac{V}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{k_B^4 \cdot T^4}{\hbar^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2 \cdot k_B^4}{15 \cdot c^3 \cdot \hbar^3} \cdot V \cdot T^4$$

نعوض في عبارة U:

$$\sigma_{SB} = \frac{\pi^2 \cdot k_B^4}{60 \cdot \hbar^3 \cdot c^2} \Rightarrow \frac{\pi^2 \cdot k_B^4}{\hbar^3 \cdot c^2} = 60 \cdot \sigma_{SB}$$

$$U = \frac{60 \cdot \sigma_{SB}}{15 \cdot c} \cdot V \cdot T^4 \Rightarrow U(T, V) = \frac{4 \cdot \sigma_{SB}}{c} \cdot V \cdot T^4$$

$$N = \langle N \rangle = \int dN(\omega) = \frac{V}{\pi^2 \cdot c^3} \cdot \int_0^\infty \frac{\omega^2 \cdot d\omega}{-1 + \exp(\beta\cdot\hbar\cdot\omega)}$$

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\hbar^3 \cdot \beta^3} \cdot \int_0^\infty \frac{x^2 \cdot dx}{-1 + \exp(x)} = \frac{V \cdot k_B^3 \cdot T^3}{\pi^2 \cdot c^3 \cdot \hbar^3} \cdot \int_0^\infty \frac{x^2 \cdot dx}{-1 + e^x}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cdot dx}{-1 + \exp(x)} = 2 \cdot \zeta(3) \rightarrow N = \frac{k_B^3}{\pi^2 \cdot c^3 \cdot \hbar^3} \cdot (2) \cdot \zeta(3) \cdot V \cdot T^3$$

$$N = \langle N \rangle = \frac{2}{\pi^2} \cdot \left(\frac{k_B}{\hbar \cdot c}\right)^3 \cdot \zeta(3) \cdot V \cdot T^3$$

~~6- نعوض قيمة التكامل~~

$$\cancel{\int_0^\infty \frac{\omega^3 \cdot d\omega}{-1 + \exp(\beta\cdot\hbar\cdot\omega)} = \frac{1}{\beta^4 \cdot \hbar^4} \cdot \int_0^\infty \frac{x^3 \cdot dx}{-1 + \exp(x)} = \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{T \cdot \pi \cdot k_B}{\hbar}\right)^4}$$

~~نعوض في عبارة F:~~