

Question (I) (30 points)

1. Gravitationnelle, $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$
2. Accélération
3. $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$
4. $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
5. $L = \frac{1}{2} m v^2 - U$
6. cinétique
7. Mécanique, non conservatives

Question (II) (20 points)

Le principe fondamental de la dynamique : $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$
 on utilise le référentiel polaire de centre celui du tonneau : r, θ

$$\begin{cases} -m R \dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \\ m R \ddot{\theta} = mg \sin \theta \end{cases} \quad \vec{N} \text{ est orienté selon } -\vec{u}_r$$

$$N = m(g \cos \theta + R \dot{\theta}^2)$$

on reconnaît $R \dot{\theta}^2 = v^2 / R$ avec v : la vitesse de la balle :

$$N = m(g \cos \theta + v^2 / R)$$

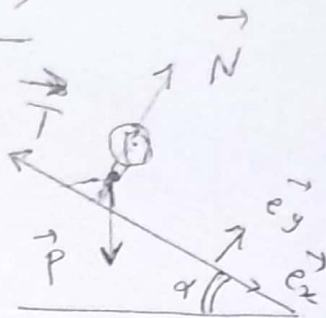
Il faut que N soit toujours positive, sinon la force s'annule ce qui est synonyme de rupture. Le cas le moins favorable se trouve en $\theta = \pi$ donc : $\cos \theta = -1$. calculons la vitesse en ce point grâce à la conservation de l'énergie mécanique : $E_m = 0 + mgh = \frac{1}{2} v(\pi)^2 + mg \times (2R)$

$$\text{donc : } v(\pi)^2 = 2g(h - 2R) : \text{ ainsi : } N(\pi) = mg(-1 + 2 \frac{h - 2R}{R})$$

$$\text{on a donc } N > 0 \text{ pour } h \text{ tel que : } 2 \cdot \frac{h - 2R}{R} > 1 \Rightarrow \boxed{h > \frac{5}{2} R}$$

Question (III) (20 points)

1.



2. Notons $x=0, x=L$ les deux extrémités de la piste. Le travail du skieur se calcule : $W(\vec{P}) = \int_0^L \vec{P} \cdot d\vec{M} = \int_0^L mg \cdot dx \cdot \vec{e}_1 = mg \sin \alpha \int_0^L dx$
 $\Rightarrow \boxed{W(\vec{P}) = mg \sin \alpha \cdot L}$

comme la force de réaction normale est perpendiculaire à la pente alors, elle ne travaille pas, donc : $\boxed{W(\vec{N}) = 0}$

comme le mouvement du skieur demeure sur la piste sans s'éloigner alors : $\vec{P}_y + \vec{N}_y = 0$, soit $N_y = N = mg \cos \alpha$, d'où : $T = \mu mg \cos \alpha$

Alors : $W(\vec{T}) = \int_0^L \vec{T} \cdot d\vec{M} = - \int_0^L T dx = - \mu mg \cos \alpha \int_0^L dx \Rightarrow \boxed{W(\vec{T}) = - \mu mg \cos \alpha \cdot L}$

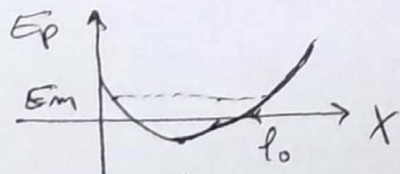
Question (IV) (30 points)

1. Energie potentielle de l'anneau : $E_p = mgx + \frac{1}{2} k(x-l_0)^2 + \text{cte}$
 soit : $E_p = mgx \cos \alpha + \frac{1}{2} k(x-l_0)^2 + \text{cte}$

$E_p = 0$ lorsque $x = l_0 \Rightarrow E_p = mg(x-l_0) \cos \alpha + \frac{1}{2} k(x-l_0)^2$

2. Si $mg \cos \alpha > k l_0$ cela voudrait dire que le poids est important pour retourner le ressort et faire passer M du côté $x < 0$.

$dE_p/dx = mg \cos \alpha + k(x-l_0)$; cette dérivée est nulle en $x = l_0 - \frac{mg \cos \alpha}{k}$
 > 0



$$E_{p, \min} = - \frac{(mg \cos \alpha)^2}{2k}$$

3. comme l'énergie cinétique est ≥ 0 , le mouvement a lieu dans les zones telles que $E_m \geq E_p$. La figure indique $E_m > 0$ car la vitesse initiale est non nulle : $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$. les points extrêmes correspondent à une énergie nulle.

$E_m = E_p(x_m)$. Soit $\frac{1}{2} m v_0^2 = mg(x_m - l_0) \cos \alpha + \frac{1}{2} k(x_m - l_0)^2$