السؤال الأول: هو اختبار سؤالين من 20 درجة لكل قانون
والعلاقات الرياضية صحيحة لها 10 درجات، الحل وتسلسل الخطوات
لها أيضاً 10 درجات

① لدينا X_1, X_2 عينة عشوائية من التوزيع الثنائي $Bin(8, \theta)$ وبالتالي حسب
خواص سابقة يكون $Y = X_1 + X_2 \sim Bin(16, \theta)$ وبالتالي دالة الاحتمال

$$f_Y(y) = P(Y=y) = \binom{16}{y} \theta^y (1-\theta)^{16-y} \quad ; \quad y = 1, \dots, 16$$

(5 درجات)

حسب احتمال الخطأ من النوع الأول والثاني وقوة الاختبار كما يلي:

$$\alpha = P(\underline{X} \in w / \theta = \tfrac{1}{2}) = P(Y \leq 1 \mid \theta = \tfrac{1}{2}) = f_Y(0; \theta = \tfrac{1}{2})$$

(بوجود قيمة واحدة فقط)

$$= \binom{16}{0} \theta^0 (1-\theta)^{16-0} = \frac{16!}{0!\,16!} \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{16} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{16} = \frac{1}{65536}$$

$$= 0.00001526$$

(5 درجات)

$$\beta = 1 - P(\underline{X} \in w / \theta = \tfrac{1}{3}) = 1 - f_Y(0; \theta = \tfrac{1}{3})$$

$$= 1 - \binom{16}{0} \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \left(1 - \tfrac{1}{3}\right)^{16-0} = 1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{16} = 0.99847$$

(5 درجات)

$$P = 1 - \beta = 0.002$$

(5 درجات)

② اختبار بارتليت

$$K = \frac{(N-k)\ln(S_p^2) - \sum (n_i - 1)\ln(S_i^2)}{1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{n_i - 1}\right) - \frac{1}{N-k}\right)} \sim \chi^2_{(k-1)}$$

(5 درجات)

$$= \frac{0.32 - 0.096}{1 + \frac{1}{32}} \cong 0.217$$

(5 درجات)

الاختبار من الطرفين لذا منطقة
الرفض للفرضية H_0 هي

$$w = \{\underline{X} :]0, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}(k-1)}[\cup] \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}(k-1)}, +\infty[\}$$

$$= \{\underline{X} :]0, 0.000038[\cup]5.024, +\infty[\}$$

(5)

بما أن $0 \in S - w$ فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1

لدينا عينتين مستقلتين ②

$H_0: P_1 = P_2$ vs $H_1: P_1 \neq P_2$ ②

بما أن الطريقتين، وبما أن $n_1 \geq 30$ ، $n_2 \geq 30$ حسب نظرية النهاية المركزية ②

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$ ②

تحت H_0 يكون

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.111 - 0.136}{\sqrt{(0.125)(0.875)\left(\frac{1}{900} + \frac{1}{1100}\right)}} = -1.67$$ ②

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{100}{900} = 0.111$$ ②

$$\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{150}{1100} = 0.136$$ ②

$$\Rightarrow \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{250}{2000} = 0.125$$ ②

$$1 - \hat{P} = 1 - 0.125 = 0.875$$ ②

مناطق رفض H_0 لاختبار الطرفين

$$W = \{\underline{X} :]-\infty, Z_{\frac{\alpha}{2}}[\cup]Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty[\}$$

$$W = \{\underline{X} :]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[\}$$ ②

منطقة قبول الفرضية H_0

$$S - W = \{\underline{X} :]Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}[\}$$

$$= \{\underline{X} :]-1.96, 1.96[\}$$ ②

بالمقارنة $Z_0 \in S - W$ نقبل H_0

لدينا ②

$$P\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$ ①

$$P\left(\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}\, Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2) \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$ ①

$$P\left(-(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}} \leq -(P_1 - P_2) \leq -(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$ ①

$$\Rightarrow P\left(-(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}} \leq -(P_1 - P_2) \leq -(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$ ①

$$\Rightarrow P\left((\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}} \leq P_1 - P_2 \leq (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$ ①

- $P_1 - P_2$ حالة

$$l_1 = (0.111 - 0.136) - 1.96\sqrt{\frac{(0.111)(0.889)}{900} + \frac{(0.136)(0.864)}{1100}} = -0.025 - 1.96 = -0.0025 - 0.02 = -0.0527$$

$$l_2 = (0.111 - 0.136) + 1.96\sqrt{\frac{(0.111)(0.889)}{900} + \frac{(0.136)(0.864)}{1100}} = -0.025 + 0.02 = 0.0027$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 \in (-0.0527, 0.0027) \quad (1)$$

السؤال الثاني: 30 درجة تم توزيعها بين الطلبين الأول والثاني ويقوم على

one sample t-test paired sample t-test

مواضيع t لعينة واحدة تم اختبار الفرضية $H_0: \mu = 74.70$ مقابل $H_1: \mu > 74.70$ (2) (1)

صياغ الاختبار

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad (2); \quad \mu = \mu_0 = 74.70$$

$\bar{x} = 75.80$ ، بالتالي نحسب قيمة H_0 في $S = 0.8$

اختبار من العينة

$$T_0 = \frac{75.80 - 74.70}{0.8/\sqrt{16}} = \frac{1.1}{0.2} = 5.5 \quad (2) \qquad t_{1-\alpha}^{(n-1)} = t_{0.95}(15) = 1.7 \quad (2)$$

في $\alpha = 0.05$ بالتالي منطقة الرفض والقبول لـ H_0 هي

$$w = \{\underline{X} :] z_{1-\alpha}, +\infty [\} = \{\underline{X} :] 1.753, +\infty [\} \quad (2)$$

$$S - w = \{\underline{X} :] -\infty, 1.753 [\} \quad (2) \Rightarrow T_0 = 5.5 \in w$$

(2) H_1 نقبل، H_0 نرفض

مواضيع t الرتبة الفرضيات (1) لاختبار من العينة، وبالتالي

$H_0: \mu_d = 0$ مقابل $H_1: \mu_d > 0$ (2)

$$T_0 = \frac{\bar{x}_d}{S_d/\sqrt{n}} = \frac{1.17}{0.97/\sqrt{16}} = 4.825 \quad (4)$$

منطقة الرفض والقبول تتقلص عما هي في الطلب السابق

$$w = \{\underline{X} :] 1.753, +\infty [\} \quad (4)$$

$$S - w = \{\underline{X} :] -\infty, 1.753 [\} \Rightarrow T_0 \in w$$

نرفض H_0 والإستراتيجية

اختبار t لعينتين مستقلتين

$\bar{X} = 12.395$ $S_1^2 = 0.105$ $S_1 = 0.114$

$\bar{Y} = 12.597$ $S_2 = 0.176$

إحصاءة الاختبار

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (M_X - M_Y)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad (4)$$

الفرضيات المراد اختبارها $H_0: M_X = M_Y$ (2) ضد $H_1: M_X < M_Y$

تحت H_0 يكون

$$T_0 = \frac{12.395 - 12.597}{0.14 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{10}}} = \frac{-0.202}{0.07223} = -2.794 \quad (4)$$

الاختبار الياء

عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05 \Rightarrow t_\alpha = t_{0.05} = -1.761$ (1)

منطقة الرفض

$$W = \{\underline{X} :]-\infty, t_\alpha^{(n_1+n_2-2)}[\} = \{\underline{X} :]-\infty, -1.761[\} \quad (2)$$

$$S - W = \{\underline{X} :]t_\alpha^{(n_1+n_2-2)}, +\infty[\} = \{\underline{X} :]-1.761, +\infty[\} \quad (2)$$

$T_0 = -2.794 \in]-\infty, -1.761[\Rightarrow T_0 \in W$ نرفض H_0

نسبة الالياف في الحقل الأول تفوق نسبة الالياف في الحقل الثاني (2)

ملاحظة: إذا استخدم الطالب

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (M_X - M_Y)}{\sqrt{\underbrace{\frac{S_1^2}{n_1}}_{0.0018} + \underbrace{\frac{S_2^2}{n_2}}_{0.0031}}} \sim t(\nu) \; ; \quad \nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\underbrace{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1}}_{0.00000464} + \underbrace{\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}_{0.0000011}} \quad \underbrace{0.000024}_{0.0000171}$$

حيث أن سيتبع أن

$$T_0 = -\frac{0202}{0.07} = -2.8857 \; , \; \nu = 14.035 \approx 14$$

نفس النتيجة وغير الطالب فرق بسيط في الدرجة تعلق بالعلاقة الرياضية

لدينا $P\text{-value} = \alpha \; P(T < T_0) = P(T < -2.80) = 0.007 < \alpha = 0.05$

نرفض H_0 ونصل إلى نفس النتيجة (3)

النتيجة صحيحة