(1)

سلم توزيع درجات مادة التحليل العقدي

لطلاب السنة الثالثة / إحصاء رياضي

الفصل الدراسي الثاني ٢٠٢٤-٢٠٢٥

ملاحظة: أي طريقة علمية صحيحة يتبعها الطالب تعتبر مقبولة

السؤال الأول (٢٠ درجة)

$$f(z) = \frac{2z-5}{z^2-5z+4} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-4}$$

(1) في جوار $z=0$ (6 درجات)

$$f(z) = \frac{-1}{1-z} + \frac{1}{-4}\left[\frac{1}{1-\frac{z}{4}}\right] =$$

$$= -(1+z+z^2+ \cdots) - \frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{4}+\left(\frac{z}{4}\right)^2+ \cdots\right)$$

(2) في الحلقة $Ann(0,1,4)$

($1<|z|<4$) (6 درجات)

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-4}$$

$$= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] + \frac{-1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{z}{4}}\right] =$$

$$= \frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+ \cdots\right] - \frac{1}{4}\left[1+\frac{z}{4}+\left(\frac{z}{4}\right)^2+ \cdots\right]$$

(3) في الحلقة $Ann(4,3,\infty)$

$3<|z-4|<\infty$ (6 درجات)

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-4}$$

$$= \frac{1}{z-4+3} + \frac{1}{z-4} = \frac{1}{z-4}\left[\frac{1}{1+\frac{3}{z-4}}\right] + \frac{1}{z-4} =$$

$$\frac{1}{z-4}\left[1-\frac{3}{z-4}+\left(\frac{3}{z-4}\right)^2 - \cdots\right] + \frac{1}{z-4}$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-4} \qquad ann(1,0,3) \sim ann(1,1,3)$$ (4)

$0<|z-1|<3 \Leftarrow 1<|z-1|<3$ (6 درجات)

$$= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1-3} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{-3}\left[\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}\right] =$$

$$= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\left[1 + \frac{z-1}{3} + \left(\frac{z-1}{3}\right)^2 + \cdots\right]$$

(5) الراسب عند ∞ $Res(f,\infty)$

نشر عند ∞ أي في الحلقة $ann(0,4,\infty)$

(6 درجات)

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-4} = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] + \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{4}{z}}\right]$$

$$= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right] + \frac{1}{z}\left[1 + \frac{4}{z} + \left(\frac{4}{z}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow Res(f,\infty) = -[1+1] = -2$$

السؤال الثاني [30 درجة]

$$f(z) = \frac{2z+3}{(z-2)(z+3)^3}$$

$z=2$ قطب بسيط

(1) (10 درجات)

$$Res(f,2) = \lim_{z\to 2} (z-2)\left[\frac{2z+3}{(z-2)(z+3)^3}\right]$$

$$= \lim_{z\to 2}\left[\frac{2z+3}{(z+3)^3}\right] = \frac{2(2)+3}{(2+3)^3} = \frac{7}{5^3}$$

(2) $z=2$ قطب مضاعف من المرتبة 3

$$f(z) = \frac{3z+2}{(z-2)^3(z-3)}$$

(10 درجات)

نلاحظ أن $Res(f,\infty)=0$ ← مبرهنة (الأخيرة)

$$Res(f,2)+Res(f,3)+Res(f,\infty)=0$$

لكن $z=3$ قطب بسيط لذا:

$$Res(f,3)=\lim_{z\to 3}(z-3)\left[\frac{3z+2}{(z-2)^3(z-3)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 3}\frac{3z+2}{(z-2)^3}=\frac{3(3)+2}{(3-2)^3}=11$$

$$\Rightarrow Res(f,2)+11+0=0 \Rightarrow Res(f,2)=-11$$

3) $z=2$ نقطة شاذة أساسية (لا نهائية الرتبة)

(٥ درجات)

$$f(z)=\sin\left(\frac{3}{z-2}\right)$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{3}{z-2}\right)=\frac{3}{z-2}-\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^5}{5!}-\cdots$$

$$\Rightarrow Res(f,2)=3$$

السؤال الثالث: (٢٥ درجة)

$$u(x,y)=3x-x^3+3xy^2$$

$$u_x=3-3x^2+3y^2,\quad u_{xx}=-6x$$

$$u_y=6xy,\quad u_{yy}=6x$$

$$\Rightarrow \Delta u=-6x+6x=0 \Rightarrow$$

u توافقي

(٥ درجات)

$$f(z) = 4x - 4y\,i = 3 - 3x^2 + 3y^2 - (6xy)\,i$$

$$= 3 - 3(x^2 - y^2 + 2xy\,i) = 3 - 3z^2$$

$\Rightarrow f'(z) = 3 - 3z^2 \Rightarrow$ بالتكامل (10 درجات)

$$\boxed{f(z) = 3z - z^3 + A}$$

السؤال الرابع (10 درجات)

$$\cos(z) = i \Rightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i \Rightarrow \qquad e^{iz} = t$$

$$\frac{e^{2iz} + 1}{2e^{iz}} = i \Rightarrow t^2 - 2ti + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2i)^2 - 4(1)(1) = -4 - 4 = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \mp 2\sqrt{2}\,i$$

(5 درجات)

$$t_{1,2} = \frac{2i \mp 2\sqrt{2}\,i}{2} = (1 \mp \sqrt{2})\,i$$

A) $e^{iz} = (1 - \sqrt{2})\,i = \left[\sqrt{2} - 1, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow e^{i(x+iy)} = \left[\sqrt{2} - 1, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow e^{ix - y} = \left[\sqrt{2} - 1, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \left[e^{-y}, x\right] = \left[\sqrt{2} - 1, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow -y = \ln(\sqrt{2} - 1) \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \end{cases}$$

$$\boxed{z = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k - \ln(\sqrt{2} - 1)\,i}$$

(3) $e^{iz} = (1+\sqrt{2})\,i \Rightarrow [e^{-y}, x] = [\sqrt{2}+1, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$$\begin{cases} e^{-y} = \sqrt{2}+1 \Rightarrow -y = \ln(\sqrt{2}+1) \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - \ln(\sqrt{2}+1)\,i}$$

السؤال الخامس: (10 درجات)

هذا السؤال هو سؤال نظري موجود في المحاضرات كما هو كاملاً

برهنة إذا استطاع الطالب إثباته ينال (10 درجات)

تتمة السؤال الرابع

$$e^{z} = i - \sqrt{3} \Rightarrow z = \ln(i - \sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{1+3} = 2, \quad \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

(5 درجات)

$$\Rightarrow z = \ln 2 + \frac{5\pi}{6} i + 2\pi i k$$