جامعة المسيلة — معهد الرياضيات والإعلام الآلي

لطلبة السنة الأولى — اختصاص رياضيات

الفصل الأول للعام الدراسي 2024 - 2025

السؤال الأول: (18 درجة)

(10) أولا: اختر الإجابة الصحيحة، واسطرها في ورقة الإجابة (كل اختيار درجتان)

1- الأحداث التي تتأثر احتمالاتها بالزيادة أو النقصان عند الإعلام الجزئي عن نتيجة التجربة هي أحداث

c شرطية

2- إذا كان الحدثان A و B مستقلين، فإن الأحداث

b $\bar{A}$ و $\bar{B}$ مستقلين

3- ليكن X متغير عشوائي معياري، فإن:

d لا يوجد جواب صحيح

4- ليكن X متغير عشوائي توقعه μ وتباينه σ^2 موجودان، فإن احتمال الحدث $A(|X-\mu|\geq\varepsilon)$، $\forall\varepsilon>0$ يساوي

c $P(A)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

5- لتكن X و Y متغيرات عشوائيات مستقلات، فإن $V(X+Y)$ يساوي:

b $V(X)+V(Y)$

(8) ثانيا: أثبت صحة واحد فقط مما يلي (يكفي إثبات واحد لتحصل الطالب على 8 درجات)

1- ليكن (Ω,L,P) فضاء احتمالي، وكان لدينا الحدث $E\in L$، $P(E)\neq 0$، فإن

دالة الاحتمال الشرطية هي دالة احتمال (تحقق شروط الاحتمال)، حيث نعرف كالتالي:

$$P_E: L\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A\longmapsto P_E(A)=P(A\setminus E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}$$

$\forall A\in L:\ P_E(A)\geq 0$

$P_E(\Omega)=1$ $\Rightarrow$ P_E دالة احتمال بعد أن تحقق مسلمات الاحتمال

$\forall A_i\in L$ $P_E(\bigcup_{i\geq 1}A_i)=\sum_{i\geq 1}P_E(A_i)$

1) $\forall A\in L:\ P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}\geq 0$: $\forall A\in L$ [1]

وهذه تعرف الاحتمال.

2) $P_E(E)=\frac{P(\Omega\cap E)}{P(E)}=\frac{P(E)}{P(E)}=1$ [2]

3) إذا كانت $A_1,\dots,A_n$ متنافية مثنى مثنى من الأحداث من L فإن $(A_i\cap E)_{i\geq 1}$ هي أحداث متنافية مثنى مثنى من أجل

$$P_E\left(\bigcup_{i\geq 1}A_i\right)=\frac{P\left[\bigcup_{i\geq 1}A_i\cap E\right]}{P(E)}=\frac{P\left[\bigcup_{i\geq 1}(A_i\cap E)\right]}{P(E)}=\sum_{i\geq 1}\frac{P(A_i\cap E)}{P(E)}=\sum_{i\geq 1}P_E(A_i)$$

اذا كان X و Y متغيران عشوائيان مستقلين و $M_X(t)$, $M_Y(t)$ دالتي المولد لعزم كل من X و Y على الترتيب،
وكان $Z = X + Y$ فإن $M_Z(t) = M_X(t)\, M_Y(t)$.

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) &= E\, e^{tZ} \\
&= E\left[e^{t(X+Y)}\right] \\
&= E\left[e^{tX+tY}\right] \\
&= E\left[e^{tX} \cdot e^{tY}\right] \quad \text{خواص دوال } e \\
&= E\left(e^{tX}\right) \cdot E\left(e^{tY}\right) \quad X, Y \text{ مستقلان} \\
&= M_X(t)\, M_Y(t)
\end{aligned}
$$

السؤال الثاني: (20 درجة)

(6) أولاً: الأحداث A : نجاح الطالب الأول ← $P(A) = \frac{1}{2}$ ← $P(A') = \frac{1}{2}$

B : نجاح الطالب الثاني ← $P(B) = \frac{2}{3}$ ← $P(B') = \frac{1}{3}$

نجاح الأول لا يؤثر على نجاح الثاني ⇐ A ، B مستقلان

1) احتمال نجاحهما معاً أي الاحتمال المطلوب $P(A \cap B)$

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)\, P(B) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

2) احتمال عدم نجاح أي منهما

$P(A \cup B)'$ الاحتمال المطلوب هو

طريقة أولى

$$
P(A \cup B)' \overset{\text{متممان}}{=} P(A' \cap B') \overset{A,B \text{ مستقلان} \Leftarrow A', B' \text{ مستقلان}}{=} P(A')\, P(B') = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}
$$

طريقة ثانية

$P(A \cup B)'$ الاحتمال المطلوب هو

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B)' &= 1 - P(A \cup B) \quad \text{قانون المتمم} \\
&= 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right] \\
&= 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

اختبار للأستاذ عبد الرحيم ناصر ، السنة الثانية علوم (ل م د)

(1) الحادث A : نتيجة الاختبار إيجابية

H_1 : الشخص مصاب ← $p(H_1) = 0.01$

H_2 : الشخص غير مصاب ← $p(H_2) = 0.99$

H_1 و H_2 تشكل تجزئة للحدث A

$p(A \setminus H_1) = 0.98$ النتيجة إيجابية على الشخص مصاب

$p(A \setminus H_2) = 0.05$ النتيجة إيجابية على الشخص غير مصاب

(1) احتمال النتيجة إيجابية أي الاختبار المطلوب $p(A)$

حسب قانون الاحتمال الكلي

$$p(A) = p(H_1)\,p(A \setminus H_1) + p(H_2)\,p(A \setminus H_2)$$

$$= (0.01)(0.98) + (0.99)(0.05) = 0.0593 = \frac{593}{10000}$$

(2) احتمال أن يكون الشخص مصاب علما أن نتيجة إيجابية أي الاحتمال المطلوب $p(H_1 \setminus A)$

حسب قانون باير

$$p(H_1 \setminus A) = \frac{p(H_2)\,p(A \setminus H_1)}{p(A)}$$

$$= \frac{(0.01)(0.98)}{0.0593} = 0.165 = \frac{98}{593}$$

السؤال الثالث (23 درجة)

أولا: (7) X متغير عشوائي ، له دالة الكثافة

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \le x < 1 \\ \frac{a}{2} & ; 1 \le x < 2 \\ 0 & ; \text{غير ذلك} \end{cases}$$

(1) إثبات قيمة a ($a = 1$)

علما أن الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة فهي تحقق

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

أي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{2} \frac{a}{2}\,dx + \int_{2}^{+\infty} 0\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + \frac{a}{2}x\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(1-0) + \frac{a}{2}(2-1) = \frac{1}{2} + \frac{a}{2}$$

ومنه

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \frac{1+a}{2} = 1 \Rightarrow 1 + a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

ومنه الدالة $f(x)$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & ; 1 \le x < 2 \\ 0 & ; \text{غير ذلك} \end{cases}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = p(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ دالة التوزيع المتجمع للمتغير X :

$t < 0 \Rightarrow F(t) = p(X < t) = 0$

$0 \le t < 1 \Rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{0}^{t} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^t = \frac{t^2}{2} - 0 = \frac{t^2}{2}$

$1 \le t < 2 \Rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{t} \frac{1}{2}\,dx =$

$\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + \frac{1}{2}x\Big]_1^t = \frac{1^2}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(t-1)$

$= \frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = \frac{t}{2}$

$t \ge 2 \Rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,dx + \int_{1}^{t} 0\,dx = 1$

وعليه

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & , \quad 0 \le t < 1 \\ \frac{t}{2} & , \quad 1 \le t < 2 \\ 1 & , \quad \text{وإلا} \end{cases}$$

ثانياً: Y متغير عشوائي له دوال التوزيع الاحتمالي (6)

y	0	1	2
$f_y(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

أ) دوال التوزيع الاحتمالي للمتغير

$$w = y^2 - 1$$

$R_w = \{-1, 0, 3\}$

$y = 0 \rightarrow w = 0 - 1 = -1$

$y = 1 \rightarrow w = 1 - 1 = 0$

$y = 2 \rightarrow w = 4 - 1 = 3$

$f_w(-1) = p(w=-1) = p(y^2-1=-1) = p(y^2=0) = p(y=0) = \frac{2}{8}$

$f_w(0) = p(w=0) = p(y^2-1=0) = p(y=1 \cup y=-1) = \frac{3}{8}$

(مرفوض)

$f_w(3) = p(w=3) = p(y^2-1=3) = p(y^2=4) = p(y=2 \cup y=-2) = \frac{3}{8}$

(مرفوض)

وعليه

دوال التوزيع الاحتمالي لـ w هي

w	-1	0	3
$f(w)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

ج) العزم الاستنادي من الرتبة الثالثة أي $E X^3$

$E x^3 = \sum_x x^3 f(x) = 0^3(\frac{2}{8}) + 1^3(\frac{3}{8}) + 2^3(\frac{3}{8}) = \frac{27}{8} = 3.375$

(30, 19)

x \ y	1	2	3
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{12}$

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيرات العشوائية X و Y

(3)

حساب E·1X ، EX4

$$EX4 = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y) = 0(1)(\tfrac{1}{12}) + 0(2)(\tfrac{1}{6}) + 0(3)(\tfrac{1}{12}) + 1(1)(\tfrac{2}{12}) + 1(2)(\tfrac{2}{6}) + 1(3)(\tfrac{2}{12})$$

$$= \frac{2}{12} + \frac{4}{6} + \frac{6}{12} = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$EYX = \sum_y \sum_x yx\, f(x,y) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow E[2XY - 3YX] = 2E(XY) - 3E(YX)$$

$$= 2(\tfrac{4}{3}) - 3(\tfrac{4}{3}) = -\frac{4}{3}$$

ثانياً: (14)

(X,Y) متغير عشوائي له دالة الكثافة المشتركة

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4} + xy, & 0 \le x < 1 \ , \ 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

① الكثافة الشرطية للمتغير X مشروطة بـ Y.

$$f_{X/Y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

نوجد أولاً دالة الكثافة الهامشية لـ Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_0^1 \frac{3}{4} + xy \; dx = \frac{3}{4}x + y\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{3}{4}(1-0) + \frac{y}{2}(1-0)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{y}{2}$$

$$= \frac{3+2y}{4}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3+2y}{4}, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ومنه:

$$f_{X/Y}(x) = \frac{\frac{3}{4} + xy}{\frac{3+2y}{4}} = \frac{\frac{3+4xy}{4}}{\frac{3+2y}{4}} = \frac{3+4xy}{3+2y}$$

② احتمال $P(Y<1)$

$$P(Y<1) = \int_{-\infty}^{1} f_Y(y)\, dy = \int_0^1 \frac{3+2y}{4}\, dy \overset{\text{نفس الكثافة}}{=} 1$$

$$P(Y<1) = P(0 \le X \le 1, 0 \le Y < 1) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{3}{4} + xy \, dy\, dx$$

$= 1$ نفس الكثافة المشتركة