حل تمرين خليل (3) ص (2) إعداد

السؤال الأول:

برهان $f_n(x)$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ ومتقاربة نقطياً من f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ فإن f قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$

لما كان المقدار ε موجباً فإنه يوجد $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كان $n \geq N(\varepsilon)$ وجد $N(\varepsilon) \neq 0$ بحيث أنه إذا كان $n \geq N(\varepsilon)$ فإن

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

حيث n عدد طبيعي بحيث $n \geq N(\varepsilon)$ فإن

$$\left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

وهو المطلوب.

السؤال الثاني:

1] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)(n^2+3)}$$

ومنه حسب الظاهر فإن السلسلة متقاربة

2] $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^t$

$$\lim_{t\to\infty} \left[(-te^{-t} - e^{-t}) - (0-1)\right] = 1$$

متقاربة

3] $a_n = \frac{2n}{6n^2+4} - \frac{\sin n}{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 - 0 = 0$$

السؤال الثالث

1] $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

ومنه متباينة السلسلة متقاربة مطلقاً

وبالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ متقاربة

وكذلك السلسلة $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ متقاربة

2] $f(x) = \frac{x+4}{x^2-3x+2} = \frac{x+4}{(x-1)(x-2)}$

$$f(x) = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x-2)(x-1)}$$

$$x+4 = (A+B)x - 2A + B$$

$$A+B = 1 \quad , \quad -2A+B = 4 \quad \Big/ \quad A = -1 \;,\; B = 2$$

ومنه

$$f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

$$= +\frac{1}{1-x} + \frac{2}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$|x|<1 \cap \left|\frac{x}{2}\right|<1$ ومنطقة التقارب

$|x|<1 \cap |x|<2 \Rightarrow \boxed{|x|<1}$

3] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{3^n(n+2)}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+3)} \cdot \frac{3^n(n+2)}{(x+2)^n} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)(n+2)}{3(n+3)} \right| = \frac{|x+2|}{3}$$

$$\frac{|x+2|}{3} < 1 \Rightarrow |x+2| < 3 \Rightarrow$$

$$-3 < x+2 < 3 \Rightarrow -5 < x < 1$$

$$x \in]-5,1[\qquad R = 3$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^n} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^{n+1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ متقاربة بمعيار

$n=1$ و

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ $a_n = \frac{1}{n+1}$

$b_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

وبالتالي من نفس المعيار

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ لهما نفس

طبيعة

ومنه

$I =]-5,1[$

السؤال الرابع:

$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $x > 1$ لما

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $x < 1$

ومنه $f(x) = 0$ بالتالي المتالية متقاربة نقطيا

نحو الدالة $f(x) = 0$

لدراسة التقارب بانتظام

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \left| \frac{1}{1+x^n} - 0 \right| =$

$g_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \Rightarrow g'(x) = \frac{-n x^{n-1}}{(1+x^n)^2}$

$-n x^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	0	2
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	1	$\frac{1}{1+2^n}$

السؤال الثالث: متقاربة بانتظام

$f(x) = x$ السؤال الأول:

بما أن f دالة فردية ومنه $a_0 = a_n = 0$ لدينا

b_n

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$

$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\pi}$

$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi - 0 \right) - (0) \right]$

$b_n = -\frac{2}{n} \cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

$S_n(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$

$S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$

$S_n(x) = f(x) \quad \forall x \in]-\pi, \pi[$

$x = \pm\pi$ لما

$S_n(\pm\pi) = \frac{\lim_{x\to -\pi} f(x) + \lim_{x\to \pi} f(x)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$

$S_n(\pi) = 0 \neq f(\pi)$ / $S_n(-\pi) = 0 \neq f(-\pi)$

$$S_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in]-\pi, \pi[\\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$