د. علي فوده ②

سلم تصحيح امتحان مقرر نظرية الاحتمالات /2/
لطلاب السنة الثالثة / إحصاء رياضي
الفصل الثاني / 2025/7/30 / الدرجة: 100

- جواب السؤال الأول (35 درجة): (4 درجات لكل تعريف و 11 درجة للبرهان):

- التقارب بالاحتمال: نقول عن متتالية متغيرات عشوائية $(X_n)_{n\geq 1}$ أنها متقاربة بالاحتمال من متغير عشوائي X إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0 \iff X_n \xrightarrow{P} X$$

- التقارب شبه أكيد: إذا تحقق:

$$P\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right)=1 \iff X_n \xrightarrow{a.s.} X$$

- التقارب في L^p: إذا تحقق:

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n-X\|_p=0 \iff \lim_{n\to+\infty} E|X_n-X|^p=0 \iff X_n \xrightarrow{L^p} X$$

- التقارب بالتوزيع: إذا كان من أجل أي دالة حقيقية f محدودة على $\mathbb{R}$ ما يلي محقق:

$$\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = E(f(X)) \iff X_n \xrightarrow{d} X$$

أو إذا تحقق: $\lim_{n\to+\infty} P(X_n\leq x) = P(X\leq x)$ من أجل جميع النقاط x التي تكون عندها الدالة $F_X(x)=P(X\leq x)$ مستمرة.

- نقول إن المتتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ تخضع القانون:

① الضعيف للأعداد الكبيرة: إذا وجد ثابت حقيقي M بحيث يتحقق: $\frac{S_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} M$ (تقارب بالاحتمال)

② القوي " " " : " " " " " " " " $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} M$ (تقارب شبه أكيد).

برهان الاقتضاء: (التقارب في L^p ⇐ التقارب احتمالياً)

$$\forall \varepsilon>0;\ P(|X_n-X|\geq\varepsilon) \leq \frac{E|X_n-X|^p}{\varepsilon^p}$$ (متراجحة ماركوف)

وبما أن $X_n \xrightarrow{L^p} X \iff E|X_n-X|^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ وبالتالي بأخذ نهاية طرفي المتراجحة نجد أن:

$$X_n \xrightarrow{P} X:\ \text{وبالتالي: } 0\leq \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\geq\varepsilon) \leq \frac{\lim_{n\to+\infty} E|X_n-X|^p}{\varepsilon^p} \leq 0$$

د. علي قبوري

السؤال الثاني (20 درجة):

المتتالية غير متناقصة: $A_n \subseteq A_{n+1}$ حيث $n \geq 1$ فإنه يمكننا كتابة ما يلي:

$$\bigcup_{n=1}^{n\to+\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup \cdots$$

وهي أحداث منفصلة (متنافية) مثنى مثنى وبالتالي:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup \cdots)$$

$$= P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \cdots + P(A_n \setminus A_{n-1}) + \cdots$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \cdots + P(A_n \setminus A_{n-1}) \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[P(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1})) \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

جواب السؤال الثالث (20 درجة):

نعلم تعريفاً أن:

$$\limsup_{n\to+\infty}(A_n) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

وبما أن متتالية الأحداث $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$، $(n\geq 1)$ هي متتالية متناقصة باطراد، فإنه بحسب هو لمى الاطراد والقياس الاحتمالي، نجد أن:

(متتالية الاطراد)

$$0 \leq P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) \overset{\text{خواص القياس}}{=} \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq n} P(A_k)$$

وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ متقاربة فإنه لبواقي النوني لها متعدومة (تعريفاً للتقارب) أي أن:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq n} P(A_k) = 0 \quad \text{ومنه} \quad P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$$

د. علي قنبوي

السؤال الرابع (25 درجة) (15 ① ، 10 ②) :

النهاية العليا للمتالية $(A_n)_{n\geq 1}$:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

النهاية الدنيا = = :

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

تكون المتالية متقاربة إذا تحقق :

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} A_n$$

ب) لدينا $A_n = A$ إذا كان n زوجي و $A_n = B$ إذا كان n فردي

وبالتالي $\bigcap_{k\geq n} A_k = A \cap B$ و $\bigcup_{k\geq n} A_k = A \cup B$

إذن :

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A\cup B) = \boxed{A\cup B}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A\cap B) = \boxed{A\cap B}$$

وبالتالي المتالية ليست متقاربة لأن :

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = A\cup B \neq A\cap B = \liminf_{n\to+\infty} A_n$$

نهاية السلم

د. علي قنبوي