سلم تصحيح جبر خطي (1) فيزياء سنة 2025 والعطرة الورقية المالفة: هي بعض عربية عربة عربة مجوبة الأن.

السؤال الأول: (10 درجة - 10 درجة)

1- لدينا $A^t = -A$ و $\overline{A} = -A$ وبالتالي $(\overline{A})^t = -A$

كما أن $A = A^t$

السؤال الثاني: $\forall u,v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u+v \in W_1 \cap W_2$

لأن $u+v \in W_1$ و $u+v \in W_2$

(W_1 و W_2 فضاءات شعاعيان جزئيان في V)

وكذلك $\forall u \in W_1 \cap W_2, \forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda u \in W_1 \cap W_2$

لأن $\lambda u \in W_1$ و $\lambda u \in W_2$

(W_1 و W_2 فضاءات شعاعيان جزئيان في V)

وعليه $W_1 \cap W_2$ فضاء شعاعي جزئي في V

2- نفرض أن $g \circ f$ تقابل غامر ونريد أن نبرهن أن g تقابل و f غامر.

ليكن c عنصر من C بما أن g غامر فإنه $\forall c \in C \ \exists b \in B$ بحيث $g(b) = c$.

وبما أن f تقابل فإنه $\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$

وعليه $c = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$

ومنه $g \circ f$ تقابل غامر

السؤال الثاني: لكل تمرين 4 درجات.

1- لتكن التطابق: نقول عن التطبيق $I_A : A \to A$ أنه تطابق معادلة في المجموعة A إذا وفقط إذا كان كل عنصر $x \in A$ يرتبط بنفسه وفق ما يلزم I_A أي $\forall x \in A : I_A(x) = x$

الجواب: لأن A مجموعة غير خالية ولكن τ قانون تشكيل داخلي في A إذن هذه المجموعة تقول عن الشيء (A, τ) زمرة إذا تحقق الشروط الآتية:

1- τ تجميعي

2- يوجد لكل عنصر في A نظير بالنسبة لـ τ

3- يوجد في A عنصر حيادي $e \in A$

المصفوفة السلمية: هي مصفوفة مربعة تكون عناصر قطرها الرئيسي أي $i = j$; $a_{ij} = \lambda$

أما $i \neq j$; $a_{ij} = 0$

- فإن المحدد المميز الخاص لكل A و k عدد غير معدوم يكون $\det(kA) = k^n \det(A)$ حيث n هي رتبة المصفوفة A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

1- لإيجاد $|A|$

$$\det(A) = 2[6+6] + 4[9+1] = 24 + 40 = 64$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$A^{-1} = adj(A) = \begin{pmatrix} +12 & -6 & -16 \\ +4 & +2 & +16 \\ 12 & -10 & 16 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$A^{-1} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -10 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

2- علما أن $\det(A) \neq 0$ الجملة حلولية

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{64} = -\frac{1}{8}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0$$

3- $$\frac{|A| rank(A)}{-tr(c)} [Hc + A] \neq \frac{64[3]}{-8} = -24$$

$$Hc = \begin{bmatrix} -10 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Hc + A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -4 & 8 & 6 \\ 12 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-24 \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -4 & 8 & 6 \\ 12 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني:

$W = \{(x, y, x+y) \; ; \; x, y \in \mathbb{R}\}$

$W = \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \; ; \; x, y \in \mathbb{R}\}$

ومنه

$S = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,1)\}$

لدينا $v_1 \neq \lambda v_2 \; ; \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

إذا S شعاع خطي حر ويولد W

$\dim(W) = \text{card}(S) = 2$

السؤال الثالث:

1

$\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$f(u+v) = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ x+x'+z+z' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'+z' \end{pmatrix} = f(u) + f(v)$

نبرهن الشرط المختص

$\forall u \in \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda u) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda y \\ \lambda x + \lambda z \end{pmatrix}$

$= \lambda \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \end{pmatrix} = \lambda f(u)$

السؤال الثالث

لدينا f

$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2

3 -

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1[-3] - 2[+1] = -3 - 2 = -5 \neq 0$

إذا فإن B شعاع خطي حر

$\text{card}(B) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

ومنه B قاعدة لـ $\mathbb{R}^3$

$f(b_1) = c_1 a_1 + c_2 a_2 \Rightarrow f(1,2,0) = (3,1) = c_1(1,-1) + c_2(1,1)$

$(3,1) = (c_1 + c_2, -c_1 + c_2)$

$c_1 + c_2 = 3 \quad c_1 = 1$

$-c_1 + c_2 = 1 \quad c_2 = 2$ العمود الأول

$f(b_2) = f(1,0,1) = (1,2) = (c_1 + c_2, -c_1 + c_2)$

$c_1 + c_2 = 1 \quad c_1 = -\frac{1}{2}$

$-c_1 + c_2 = 2 \quad c_2 = \frac{3}{2}$

$f(b_3) = f(-1,3,0) = (2,-1) = (c_1 + c_2, -c_1 + c_2)$

$c_1 + c_2 = 2 \quad c_1 = \frac{3}{2}$

$-c_1 + c_2 = -1 \quad c_2 = \frac{1}{2}$

$K = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$