سنة أولى رياضيات مقررات

2025 - 2024

السؤال الأول: (15 ن)

$\vec{A} \perp \vec{B} \iff \vec{A}.\vec{B} = 0$ (5 ن) (1)

$\vec{A}.\vec{B} = x_A.x_B + y_A.y_B + z_A.z_B = (1)(-1) + (-1)(1) + (2)(1)$

$= -1 - 1 + 2 = 0$

$\vec{A}.\vec{B} = 0 \implies \vec{A} \perp \vec{B}$

$\vec{A} // \vec{C} \iff \vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{0}$ (5 ن)

$$\vec{A} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = [-4-(-4)]\vec{i} - [4-4]\vec{j} + [(-2)-(-2)]\vec{k}$$

$= 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} \implies \vec{A} // \vec{C}$

---

(2) حساب حجم متوازي السطوح: (5 ن)

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{D} = \begin{vmatrix} +1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (+1)[0+1] - (-1)[0-(-2)]$$

$+(2)[1+2] = 1 + 2 + 6$

$= 9$

وحدة مكعبة $\boxed{V = 9}$

السؤال الثاني: (15 نقطة)

$N(r=2\sqrt{2}, \theta=\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{\pi}{6})$ (5 نقاط)

$M(r=1, \theta=\frac{3\pi}{4}, z=2)$

1) احداثيات النقاط في كل حالة:

M معطاة بالاحداثيات الاسطوانية.

العلاقات بين الاحداثيات الاسطوانية والديكارتية

$x = r\cos\theta \Rightarrow x = 1\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = r\sin\theta \Rightarrow y = 1\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z = z \Rightarrow z = 2$

$M_{xyz}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$

N معطاة بالاحداثيات الكروية

$x = r\cos\theta\cos\varphi \Rightarrow x = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$

$y = r\cos\theta\sin\varphi \Rightarrow y = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2}) = 1$

$z = r\sin\theta \Rightarrow z = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2$

$N_{xyz}(\sqrt{3}, 1, 2)$

2) احداثيات النقطة التي تقسم [MN] بالنسبة $r=3$

$x = \frac{x_1 + r x_2}{1+r} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{8}$

$y = \frac{y_1 + r y_2}{1+r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 3}{4} = \frac{\sqrt{2}+6}{8}$

$$z = \frac{z_1 + r z_2}{1+r} = \frac{2 + 3(2)}{4} = 2$$

احداثيات النقطة المطلوبة

$r = 3$

$$\left(\frac{-\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{5} , \frac{\sqrt{2}+6}{8} , 2 \right)$$

السؤال الثالث: معادلة المستوي:

(حجم 20)

المستقيم يمر من النقطتين $A(4, 2, -3)$ ، $B(1, 2, -5)$

فيكون معنى هذا المستقيم هو نفس الشعاع $\vec{BA}$

$$\vec{BA}(x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$$

$$\vec{BA}(3, 0, 2)$$

معادلة المستقيم الناظم للمستوي حيث المستقيم الناظم يوازي ويمر من A, B

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{2}$$

ومنه معادلة المستوي

$$P \equiv px + qy + rz + h = 0$$

حيث

$$\vec{N} \equiv \vec{BA} \equiv (3, 0, 2)$$

$$P \equiv 3x + 0y + 2z + h = 0$$

المستوي يمر من النقطة $B(1, 2, -5)$ فيكون

$$3(1) + 0(2) + 2(-5) + h = 0$$

$$3 - 10 + h = 0 \Rightarrow \boxed{h = 7}$$

معادلة المستوي

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-7) - (1)(-4) + (2)(3)$$
$$= -7 + 4 + 6 = 3 \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3)(-7) - (1)(+25) + (2)(-10)$$
$$= -21 + 25 - 20 = -65$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (1)(25) - (3)(-4) + (2)(-5) =$$
$$= 25 + 12 - 10 = 27$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (1)(10) - (1)(-5) + (3)(3)$$
$$= 10 + 5 + 6 = 21$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-65}{3} = -21,67$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{27}{3} = 9$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{21}{3} = 7$$

$P_1 + \lambda P_2 = 0$ معادلة حزمة المستويات التي تمر بـ D (2)

$(P_1 + \lambda P_2)x + (q_1 + \lambda q_2)y + (r_1 + \lambda r_2)z + h_1 + \lambda h_2 = 0$

$(1+\lambda)x + (1-2\lambda)y + (2+5\lambda)z + 3 + 0\lambda = 0$

بما أنه الحزمة توازي المستوي P_1 فيكون ناظم الحزمة

$\vec{N}(1+\lambda, 1-2\lambda, 2+5\lambda) \parallel \vec{N}_{P_1}(1, -1, +2)$

أي لهما نفس الناظم

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 1+\lambda \\ -1 = 1-2\lambda \\ 2 = 2+5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 0$$

وعليه ناظم الحزمة:

$\vec{N}(1, -1, 2)$

فتكون المعادلة

$$x + y + 2z - 3 + 0\lambda = 0$$

السؤال الخامس:

$$C\begin{cases} g(x,y,z) \equiv 2x^2 + 3xy - z + 6 = 0 \end{cases}$$

اكتب معادلة المستوي المماس ، المستقيم الناظم للسطح C في $(0,-2,2)$

معادلة المستوي المماس للسطح

$$(x-x_0)f'_{x_0} + (y-y_0)f'_{y_0} + (z-z_0)f'_{z_0} = 0$$

$f'_x = 4x + 3y \Rightarrow f'_{x_0} = -6$

$f'_y = 3x \Rightarrow f'_{y_0} = 0$

$f'_z = -1 \Rightarrow f'_{z_0} = -1$

$$-6(x-0)+0(y+2)+(-1)(z-2)=0$$

$$-6x-z+2=0$$

المعادلات الاستاذة للمستقيم الناظم للسطح في النقطة A

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

$$\frac{x-0}{-6}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-2}{-1}$$

انتهت الأسئلة.

م.ا.ف. فاطمة سليمان