جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السنة الثانية
امتحان مقرر
البنى الجبرية (٢)

المدة : ساعتان
الاسم :
الرقم الامتحاني :

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول : 25 درجة لتكن R حلقة واحدية . و I, J مثاليين في هذه الحلقة

أثبت أن $I \cap J$ هو مثالي في الحلقة R . ثم بين أنه إذا كان $x^n = 0$ عديم القوى فإن العنصر $1 - x$ هو عنصر قابل للقلب .

السؤال الثاني : 25 درجة حل التمارين التالية .

١- لتكن $R = Z[i]$ و $I = \langle 1 + i \rangle$ مثالي فيها .أثبت أن I أولي .
٢- احسب $\mathbf{Chr}(Z_2 \oplus Z_4 \oplus Z_{10})$.(المميز).
٣- أثبت أن $Z_{12} = 4Z_{12} \oplus 9Z_{12}$ ثم أوجد الحلقة $Z_{12}/6Z_{12}$.
٤- احسب $\sqrt{\langle 3 \rangle}$ في Z_{27} .
٥- أثبت أن $1 + \sqrt{-3} \in Z[\sqrt{-3}]$ هو عنصر بسيط ، ثم استنتج أن $Z[\sqrt{-3}]$ ليست UFD .

السؤال الثالث : 25 درجة

لنأخذ الحلقة $R = Z \oplus Z$ والمجموعة $I = \{(3x, y): \quad x, y \in Z\}$ والمطلوب .

١- أثبت أن I مثالي(يميني) في الحلقة .
٢- أثبت $Z \oplus Z/I$ $\varphi: Z_3 \longrightarrow$ المعرف بالشكل $\varphi(x) = (x, 0) + I$ هو تماثل .
٣- ماذا تستنتج هل I أعظمي ؟ أولي ؟ علل الإجابة .

السؤال الرابع : 25 درجة

ليكن F حقل و $f(x) \in F[x]$ برهن على صحة التكافؤ

$$df(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in U(F[x]) .$$

ثم بين باستخدام معيار ايزنشتاين (Eisenstein's criterion) أن

$g(x) = 3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$ أولية في $Z[x]$.

انتهت الأسئلة

$\sum_{0}^{n} x^n = 0$

$1 + x^{k-1}$ $1 + x + \cdots x^{n}$

$(1-x)($ $)(1-x)($

سلم البنى الجزئية (2) الفصل الثاني ص.ث

الدرجة 100

السؤال الأول 25:

- ليكن R حلقة، و I و J مثاليين في هذه الحلقة. ولبرهن أن $I \cap J$ مثالي: لبرهن تحقق الشرطين

1- الشرط الأولي: أيا كان $x, y \in I \cap J$ فإن:

$$x - y \in I \cap J$$

2- الشرط الثاني: أيا كان $r \in R$ و $x \in I \cap J$ فإن:

$$r \cdot x \in I \cap J$$

(8)

$x - y \in I \cap J$

بما أن $x \in I$ و $y \in I$ ، $x \in J$ ، $y \in J$

$\Rightarrow x - y \in I$ و $x - y \in J \Rightarrow x - y \in I \cap J$

ومن جهة أخرى: لكل $x \in I \cap J$ فإن $x \in I$ و $x \in J$.

(8)

$r \cdot x \in I$ و $rx \in J \Rightarrow rx \in I \cap J$

- لبرهن أن $1 - x$ وحدة في $U(R)$ حيث $x^n = 0$

$$(1 - x)(1 + \dots + x^{n-1}) = 1$$

(9)

هذا يعني أن $(1-x)^{-1} = 1 + \dots + x^{n-1} \in R$

وبالتالي نستنتج

$$1 - x \in U(R)$$

السؤال الثاني: 25 درجة.

1- 5 درجات:

لدينا:

$$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}[i]/I$$

I أولي $\Leftarrow$ $\frac{\mathbb{Z}[i]}{I}$ تامة $\Leftarrow$ I أعظمي حسب مبرهنة

I أولي $\Leftrightarrow$ $\frac{\mathbb{Z}[i]}{I} \cong R/I$

ب- 5 درجات:

$$chr(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{10}) = Lcm(2,4,10) = 20$$

ج- 5 درجات:

4 عنصر مولد لأن $4^2 = 4$ وبالتالي $n-1 = 4$ هو عنصر واحدي لـ R.

$$\Rightarrow Z_{12} = 4\mathbb{Z}_{12} \oplus (1-4)\mathbb{Z}_{12} = 4\mathbb{Z}_{12} \oplus 9\mathbb{Z}_{12}$$

$$Z_R/6\mathbb{Z} = \{6\mathbb{Z}_{12}, 1+6\mathbb{Z}_{12}, 2+6\mathbb{Z}_{12}, 3+6\mathbb{Z}_{12}, 4+6\mathbb{Z}_{12}, 5+6\mathbb{Z}_{12}\}$$

4- 5 درجات:

$$A = \langle 3 \rangle = 3R = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$$

لكن $x \in \sqrt{\langle 3 \rangle}$ حسب التعريف لدينا $x^n \in \langle 3 \rangle$

والعناصر التي تحقق الشرط هي نفسها عناصر $\langle 3 \rangle$.

وبما أن $\langle 3 \rangle \subseteq \sqrt{\langle 3 \rangle}$ $\Leftarrow$ $\langle 3 \rangle = \sqrt{\langle 3 \rangle}$

5- 5 درجات: لدينا $\varphi(a+b\sqrt{-3}) = a^2+3b^2$ نضع $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

$x = x_1 \cdot x_2$ ولنفرض أن x غير قابل للقلب

$\varphi(x) = \varphi(x_1) = 2 \Rightarrow \varphi(x_2) = 1$ $\Leftarrow$ $\varphi(x_1)\varphi(x_2) = 4$ $\Leftarrow$ x غير قابل للقلب

$1+\sqrt{-3}$ هو مضاعف لكل x $\Leftarrow$ $(1+\sqrt{-3})(1+\sqrt{-3}) = 4 = 2 \times 2$

سؤال الرابع 25.

1- 15 درجة.

$d f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in U(F(x))$

$\Leftarrow$ لنفرض أن $f(x)$ قابلة للقلبة بما أن F حقل فإن F منتظمة إذن $df(x) = 0$

$\Rightarrow$ لنفرض $df(x) = 0 \Leftarrow f(x) = a$ حيث a عنصر ما في F وبما أن F حقل فإن a قابل للقلبة في F وبالتالي $f(x)$ قابلة للقلبة في $F[x]$

2- حدد رتبة

$$f(x) = 3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$$

نختار $p = 5$

- $a_n = 3$ لا يقسم $p = 5$ (3)
- $p = 5$ يقسم كل من $20, 10, -20, 15$ (3)
- $a_0 = 20$ يقسم $p^2 = 25$ (3)

الشروط محققة $\Leftarrow f(x)$ أبسط متوحش وبالتالي متوحش $\mathbb{Z}$.

انتهى الأستاذ

2026/1/28

السؤال الثاني: 25 درجة

1- $I = \{(3x, y) ; x, y \in \mathbb{Z}\}$

لكي $I \oplus \mathbb{Z}$ يكون حلقة جزئية من $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$x = (a_1, b_1)$ ، $y = (a_2, b_2)$: $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$

(5) $x - y = (a, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2) \in I \oplus \mathbb{Z}$

$r \in \mathbb{Z}$ ، $rx = r(a_1, b_1) = (ra_1, rb_1) \in I \oplus \mathbb{Z}$

2- إذا كانت:

$\varphi(x) = (x, 0) + I$

$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(5) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

(5) $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

(5) $\forall x \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ، $\exists w \in \mathbb{Z}_3$ ، $\varphi(w) = x$

$\Rightarrow \varphi$ تماثل.

3- بما أن: φ تماثل $\Rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / I \cong \mathbb{Z}_3$

وبما أن $\mathbb{Z}_3$ حقل $\Rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / I$ حقل

(5) $\Rightarrow I$ أعظمي حسب البرهنة

وبما أن كل أعظمي هو أولي في I أولي