جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر
نظرية الاحتمالات
لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الفصل الثاني: 2024/2025
التاريخ: 2025/08/06
المدة: ساعتين

س1 (30 درجة): وهن ما يلي:

1- $V(aX+b)=a^2.V(X)\ ,\forall a\in\mathbb{R}$ .

2- $Cov(aX\ ,bY)=a.b.Cov(X,Y)\ ,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

3- إذا كان $X$ و $Y$ مستقلين و لكل منهما توقع محدود عندئذ فان $E(X\times Y)=E(X)\times E(Y)$.

س2 (40 درجة): ليكن $X$ متغيرا عشوائيا له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda x & ;\ 0\le x\le 2\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

1- أثبت أن $\lambda=\frac{1}{2}$.

2- عين دالة التوزيع المتجمع لـ $X$ .

3- احسب $F(1)$ و $P(1<X<2)$.

4- احسب التوقع الرياضي و الانحراف المعياري لـ $X$.

س3 (30 درجة): ليكن $X$ و $Y$ متغيرين عشوائيين لهما دالة الكثافة المشتركة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{12} & ;\ 0<x<3,\ 0<y<4\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

1- وهن أن $f(x,y)$ دالة كثافة مشتركة فعلية لـ $(X,Y)$.

2- عين الكثافات الاحتمالية الهامشية $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ .

3- احسب الاحتمالات التالية: $P(0<X<1\ ,\ Y>0)$ و $P(Y<1)$.

4- هل $X$ و $Y$ مستقلان أم لا ؟.

انتهت الأسئلة

أرجو لكم التفوق والنجاح

د. علي قنبوي

$$\int_0^2 \lambda x\,dx=\lambda\left[\frac{x^2}{2}\right]$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{0}(0)dt+\int_0^x \frac{t}{2}$$

(1) د. علي قبوي

سلم تصحيح امتحان مقرر نظرية الاحتمالات
لطلاب السنة الثالثة // رياضيات
الفصل الثاني // 2025/8/6 // الدرجة: 100

- جواب السؤال الأول (30 درجة، 10 درجات لكل فقرة):

(1)
$$V(aX+b) = E(aX+b)^2 - (E(aX+b))^2 = E(a^2X^2+2abX+b^2) - (aEX+b)^2$$
$$= a^2EX^2 + 2abEX + b^2 - a^2(EX)^2 - 2abEX - b^2$$
$$= a^2(EX^2 - (EX)^2) = a^2 \cdot V(X)$$

(2) (تمرين)
$$Cov(aX, bY) := E(aX \cdot bY) - E(aX) \cdot E(bY)$$
$$= a \cdot b\, E(X \cdot Y) - a \cdot EX \cdot b \cdot EY$$
$$= a \cdot b\,[E(X \cdot Y) - EX \cdot EY] = a \cdot b \cdot Cov(X, Y)$$
(هذا هو المطلوب البرهان)

(3) (تمرين)
$$E(X \cdot Y) := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$
وبما أن X و Y مستقلان عن بعضهما، فإن: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ وبالتالي:
$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy = EX \cdot EY$$

- جواب السؤال الثاني (40 درجة) (10 درجات لكل طلب):

(1) بما أن $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فإنها تحقق الشرط: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$ وبالتالي:
$$\int_0^2 \lambda x\, dx = \lambda \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \lambda\left(\frac{4}{2}\right) = 2\lambda = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$$

(2) لدينا $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$ تعريفاً وبالتالي:

* من أجل $x < 0$:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} (0)\, dt = \boxed{0}$$

* من أجل $0 \le x \le 2$:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} (0)\, dt + \int_0^x \frac{t}{2}\, dt = 0 + \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x = \boxed{\frac{x^2}{4}}$$

② حل آخر

من أجل $x>2$ :

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{0}(0)dt+\int_{0}^{2}\frac{t}{2}dt+\int_{2}^{x}(0)dt=0+\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^2+0=\boxed{1}$$

إذن :

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x\le 0\\ \frac{x^2}{4} & ; \quad 0<x<2\\ 1 & ; \quad 2\le x\end{cases}$$

---

③

$$F(1)=\frac{(1)^2}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(1<X<2)=F_X(2)-F_X(1)=\frac{(2)^2}{4}-\frac{(1)^2}{4}=\frac{4-1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

---

④

$$E(X):=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_X(x)dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{8}{6}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

$$E(X^2):=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)dx=\int_0^2\frac{x^3}{2}dx=\left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2=\frac{16}{8}=\boxed{2}$$

$$V(X)=EX^2-(EX)^2=2-\frac{16}{9}=\frac{18-16}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

---

- جواب السؤال الثالث (30 درجة) :

$f(x,y)$ كثافة احتمالية مشتركة لـ $X$ و $Y$، يجب تحقق:

① (8 درجات): حتى تكون

ⓐ $f(x,y)=\frac{1}{12}\ge 0$ , $\forall x,y$ وهو محقق.

ⓑ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy\overset{?}{=}1$ ⇐

$$\int_0^4\int_0^3\frac{1}{12}dxdy=\int_0^4\left[\frac{x}{12}\right]_0^3dy=\int_0^4\frac{1}{4}dy=\left[\frac{y}{4}\right]_0^4=\boxed{1}$$ محقق

إذن $f$ دالة كثافة احتمالية فعلية مشتركة لـ $X$ و $Y$.

---

② (8 درجات)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^4\frac{dy}{12}=\left[\frac{y}{12}\right]_0^4=\frac{4}{12}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

إذن :

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & ; \quad 0<x<3\\ 0 & ; \quad \text{ذلك وإلا}\end{cases}$$

---

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^3\frac{dx}{12}=\left[\frac{x}{12}\right]_0^3=\frac{3}{12}=\boxed{\frac{1}{4}}\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & ; 0<y<4\\ 0 & ; \text{ذلك}\end{cases}$$

ب) (6 درجات):

3) د. علي قبوي

$$P(Y<1) = \int_{-\infty}^{1} f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{4}\,dy = \left[\frac{y}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(0<X<1, Y>0) = \int_0^1 \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^4 \frac{dy}{12}\right) dx = \boxed{\frac{1}{3}}$$

---

ج) (8 درجات): لدينا شرط الاستقلال: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ ولذلك

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = f(x,y) \Rightarrow X \text{ و } Y \text{ مستقلان عشوائيا}$$

---

نهاية السلم

د. علي قبوي